2009-2010	Contrôle de connaissances	2 heures	Math.

Calculatrice interdite – Formulaire ‘’officiel’’ autorisé.

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \cos\left(e^{2x}\right).\ln(x)$

ii) $g(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{x+1}}$

iii) $h(x) = 3^{5x}$

Exercice 2 :

Résoudre : $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+15} < 10$.

Exercice 3 :

i) Déterminer $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ii) Résoudre : $\dfrac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3}\tan x} = 1$.

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\cos x - 1} - 1}{x.\ln(1+3x)}$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\ln\left(1+5x^2\right)\right)}{1 - \cos\left(e^{2x} - 1\right)}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - e^{\frac{x}{2}}}{5x^2 + x^3 - 8x^4}$

Exercice 5 :

Calculer les intégrales suivantes :

i) $I = \displaystyle\int_{-6}^{6} \frac{\sin\left(x^3\right)\sqrt{x^2+76}}{\cos(8x)\left(\tan x\right)^4}\,dx$

ii) $J = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2 + 3x - 1)e^{5x}\,dx$

Exercice 6 :

Soit {0 ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } un repère orthonormé de l'espace.

Soient A(1, 2, 1), B(1, 0, 2) et C(2,-1, 2).

i) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

ii) Déterminer une équation du plan P passant par A, B et C.

iii) Déterminer une équation du plan Q passant par A et orthogonal à (BC).

iv) Déterminer une condition sur le réel a pour que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soient coplanaires.

Exercice 7 :

Etudier la différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes et exprimer leur différentielle, si elle existe :

$i)$ $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$ii)$ $g(x, y) = x + x^2 y$

Exercice 8 :

Soit $\vec{V} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ M(x, y, z) \mapsto \vec{V}(M) \begin{pmatrix} -y\sin x + \dfrac{1}{x} \\ \cos x + ze^y + 2y \\ e^y \end{pmatrix} \end{array} \right.$, pour $x \neq 0$.

i) Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f que l'on déterminera.

ii) Calculer $div_M \vec{V}$ et $\overrightarrow{rot_M} \vec{V}$.