METEO-FRANCE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

INTERNE - E.R.
T.S.E

CONCOURS INTERNE ET EMPLOIS RESERVES 2009 DE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA METEOROLOGIE

FILIERE EXPLOITATION

-:-:-:-:-:-

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures Coefficient : 4

-:-:-:-:-:-:-

La clarté des explications et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'évaluation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Barème envisagé : exercice 1 : 6,5 points, exercice 2 : 8 points et exercice 3 : 5,5 points.

EXERCICE 1 :

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1- Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$.

i) Montrer que $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique.

ii) Calculer w_n en fonction de n.

iii) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

2- i) Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.

ii) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes.

3- Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $x_n = 8v_n + 3u_n$

i) Montrer que cette suite est constante.

ii) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

EXERCICE 2 :

1- Soit P la fonction polynôme définie pour tout réel x par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

i) Etudier les variations de P.

ii) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet une unique racine α et que $\alpha \in]1,6;1,7[$.

2- Soient D = $]-1;+\infty[$ et f la fonction définie sur D par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$, de courbe représentative C dans un repère orthonormé du plan.

i) Etudier les variations de f.

ii) Ecrire une équation de la tangente T_0 à C au point d'abscisse 0.

iii) Etudier la position de T_0 par rapport à C sur l'intervalle]-1 ; 1[.

iv) Montrer que C est au dessus de T_1, tangente à C au point d'abscisse 1.

v) Tracer C, T_0 et T_1 sur un même graphe (unité 4cm).

3- Soient x un réel positif et F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.

i) Justifier l'existence de F(x).

ii) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x dans D on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

iii) Calculer F(1) et interpréter graphiquement ce résultat.

4- Soient $I = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^3}dt$ et les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^{3n}(1-t)dt = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

ii) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^1 (1-t)\dfrac{1-(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}dt$.

iii) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I - S_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{3n}(1-t)\dfrac{t^3}{1+t^3}dt$.

iv) Donner sur [0 ; 1] un majorant de $\dfrac{t^3}{1+t^3}$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |I - S_n| \leq \dfrac{1}{9n^2}$.

5- Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que sa limite est $\dfrac{2\ln(2)}{3}$.

EXERCICE 3 :

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), unité graphique 4 cm. A tout nombre complexe z on associe les points :

- M d'affixe z,
- M' d'affixe z + i,
- M'' d'affixe iz.

1- Pour quel nombre z les points O et M' sont-ils confondus ?
   Pour quel nombre z les points M' et M'' sont-ils confondus ?
2- On suppose que z est distinct de 0, de –i et de $\frac{1-i}{2}$.
   Montrer que les points O, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\frac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.
3- Le nombre complexe z étant non nul, on pose z = x + iy, avec x et y réels.
   Calculer la partie imaginaire de $\frac{z+i}{iz}$ en fonction de x et y.
4- Déterminer et représenter l'ensemble C des points M tels que O, M' et M'' soient alignés et deux à deux distincts.
5- En prenant z = $\frac{-1}{4}-\frac{2+\sqrt{3}}{4}i$, sans calculer $\sqrt{3}$, placer exactement dans P les points M, M' et M'' en utilisant uniquement la règle et le compas et en laissant bien apparentes les traces de construction.