Initiation aux probabilités
TD de Révision

Exercice 1

Dans une pépinière, 95% des scions sont supposés sans virus. Par commodité, les scions sont rangés par paquets de 2. Un paquet est dit sain si les 2 scions qui le composent sont sans virus.

1) Quelle est la probabilité p_1 d'avoir un paquet sain ?
2) Un lot de 10 paquets est accepté par l'acheteur si au moins 9 paquets sont sains. Quelle est la probabilité qu'un lot soit accepté ?
3) Le pépiniériste décide de faire des paquets de 4 scions. Un paquet sera sain si les 4 scions sont sains. Quelle est la probabilité p_2 d'avoir un paquet sain ?
4) Un lot de 5 paquets est accepté par l'acheteur si au moins 4 paquets sont sains. Quelle est la probabilité qu'un lot soit accepté ?

Exercice 2

Pour un tirage au sort, on dispose de 2 urnes numérotées. La première urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. La deuxième urne contient 4 boules portant un chiffre pair (hormis 0), tous différents. Toutes les boules sont supposées indiscernables, et le choix de l'urne est aléatoire, équiprobable. On tire au hasard une boule dans l'une des urnes.

1) Faire un arbre représentant l'expérience aléatoire.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   i) La boule tirée porte le chiffre 3.
   ii) La boule tirée porte le chiffre 2.
   iii) La boule tirée porte un numéro pair.
3) On note 1 la première urne et 2 la deuxième. On considère la variable aléatoire X qui donne le numéro de l'urne tirée, et la variable aléatoire Y qui donne le numéro porté par la boule tirée. Donner la loi conjointe de X et Y, à l'aide d'un tableau, et dire si les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 3

Dans un grand hôpital, il arrive en moyenne 1,25 personne à la minute aux urgences entre 9h et 12h.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes observées à la minute à l'entrée de ce service entre 9h et 12h et on admet que cette variable suit une loi de Poisson.

1) k étant un entier naturel, déterminer la probabilité qu'en une minute il arrive k personnes.
2) Déterminer les probabilités pour qu'en une minute il arrive :
   i) 0 personne
   ii) 4 personnes
   iii) Au moins 3 personnes.

T.S.V.P.

Exercice 4

La durée de vie exprimée en semaine de composants électroniques suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On a observé expérimentalement que 95,12% de ces composants étaient encore en état de marche au bout de 25 semaines de fonctionnement. En déduire une valeur du paramètre à 10^{-3} près.
2) Calculer la probabilité qu'un composant soit encore en état de marche au bout de 100 semaines.
3) Sachant qu'un de ces composants a bien fonctionné pendant 100 semaines, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 200 semaines ?
4) Calculer la valeur de t vérifiant $P(X \leq t) = P(X \geq t)$ (demi-vie).

Exercice 5

Un système est constitué de trois éléments de taux de défaillance :

$\lambda_1(t) = 0,001$ pannes/heure.

$\lambda_2(t) = 0,002$ pannes/heure.

$\lambda_3(t) = 0,003t^{-0,5}$ pannes/heure.

1) Déterminer la fiabilité du système si les trois éléments sont en série. Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.
2) 2 des éléments forment un système en parallèle, monté en série avec celui qui reste.
   i) Faire une représentation du système
   ii) Calculer la fiabilité des différents systèmes possibles pour 1000 heures, et donner la configuration qui possède la plus forte fiabilité.
3) 2 des éléments forment un système en série, monté en parallèle avec le troisième.
   i) Faire une représentation du système
   ii) Calculer la fiabilité des différents systèmes possibles pour 1000 heures, et donner la configuration qui possède la plus forte fiabilité.

Exercice 6

Soit (X, Y) un couple de VAR de densité : $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x+y)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Etudier l'indépendance du couple (X, Y).
3) Calculer la loi de $Z = X+Y$.

Exercice 7

Après avoir observé la durée de vie des ILS, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,019$ pannes/jour.

1) En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une défaillance sur une période de 3 ans.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux défaillances sur la même période.