Annexe 5 : TD n°2

Exercice 1

Une entreprise construit des géodes. Dans sa production, on suppose que la proportion de géodes défectueux est égale à p. On prend n géodes au hasard. Calculer la probabilité que :

1) aucun géode ne soit défectueux.
2) exactement un géode soit défectueux.
3) au moins un géode soit défectueux.
4) k géodes soient défectueux.

Exercice 2

Soit X une V.A.R. binomiale de paramètres n et 0,01, notée $B(n; 0,01)$.

1) Déterminer n pour que $\text{IP}\left(X = 0\right) \leq 0,01$.

2) Déterminer n pour que $\text{IP}\left(X \geq 1\right) \geq 0,90$.

Exercice 3

Soit X une V.A.R. binomiale $B(3; 0,2)$.

1) Calculer IP(X < 0), IP(X < 1), IP(X < 2), IP(X < 3), IP(X < 4)}.
2) En déduire le tracé de la fonction de répartition.

Exercice 4

Un laboratoire doit analyser N prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. On admet que pour un prélèvement quelconque, la probabilité qu'il contienne le corps C est p.
On pose $q = 1 - p$ et on suppose que les prélèvements sont indépendants.

On répartit les prélèvements en g groupes d'effectif n ($N = ng$) et pour chaque groupe, on constitue un mélange à l'aide de quantités égales de chacun des n prélèvements. Si ce mélange ne contient pas le corps C, une seule analyse aura établi qu'aucun des n prélèvements du groupe ne contient le corps C. Si ce mélange contient le corps C, il faut alors analyser séparément les n prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent le corps C : le nombre d'analyses faites pour le groupe est alors n+1.

On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre total d'analyses effectuées.

1) Que représente $Y = \dfrac{X-g}{n}$?
2) Déterminer la loi de Y.
3) Déterminer IE(X) et Var(X).

Application numérique : $N = 200$, $p = 0,05$, $n = 4$ ou 5.

Exercice 5

Le patron d'un grand hôpital de la région toulousaine envisage de programmer la construction de nouvelles salles d'opérations de façon à réduire si nécessaire le délai d'attente des patients. Actuellement, son établissement compte 5 blocs opératoires. Les interventions étant lourdes, on compte une demi-journée d'occupation du bloc par intervention.
Une enquête sur le nombre d'interventions par demi-journée souhaitées par les chirurgiens est menée sur un échantillon de 180 demi-journées, échantillon supposé représentatif du fonctionnement de l'hôpital. La distribution statistique issue de l'étude est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_i	3	15	27	33	36	27	18	9	6	4	2

où x_i représente le nombre d'interventions souhaitées par les chirurgiens par demi-journée et F_i est la fréquence.

1) Tracer l'histogramme.

2) On suppose alors que le nombre d'interventions par demi-journée suit une loi de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est à dire que :

$$\mathrm{IP}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

a) Calculer λ.
b) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun patient en attente?
c) Combien faut-il de blocs opératoires supplémentaires au minimum pour que la probabilité précédente soit supérieure à 0,95?

Exercice 6

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n,p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- pour $X \neq 0$, le compteur affiche la valeur correcte de X.
- pour $X = 0$, le compteur affiche une valeur au hasard entre 1 et n.

On note Y le résultat du compteur détraqué.

1) Déterminer la loi de Y.

2) Calculer $\mathrm{IE}[Y]$ et vérifier $\mathrm{IE}[Y] \geq \mathrm{IE}[X]$.