

Seuls les documents distribués avec le sujet et une calculatrice (de tout type) sont acceptés.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1

Dans la promotion TSA n , 25% des étudiants n'ont pas réussi l'épreuve de Probabilités, 13% celle de Statistiques, et 8% des étudiants n'ont réussi ni en Probabilités ni en Statistiques.

Un étudiant est choisi au hasard.

- a) S'il n'a pas réussi en Probas, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas réussi en Stat ?
- b) S'il n'a pas réussi en Stat, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas non plus réussi en Probas ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un échec sur les deux modules ?

Exercice 2

On admet que le nombre d'accidents survenant quotidiennement sur une autoroute est une V.A.R. de Poisson de paramètre $\theta = 3$.

- a) Quelle est la probabilité qu'il survienne au moins 3 accidents lors d'un jour donné ?
- b) Même question si l'on sait qu'un accident au moins a eu lieu.

Exercice 3

Dans un aéroport en manque de personnel, on estime qu'un bagage n'est pas correctement acheminé dans 2 cas sur 100.

1. Un avion enregistre 238 bagages. On note X le nombre d'erreurs d'acheminement.

- a) Quelle est la loi de X ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur d'acheminement ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 erreurs ?

2. On note Y le nombre d'erreurs d'acheminement sur tout l'aéroport.

Le nombre moyen de bagages enregistrés étant de l'ordre de 20000, on suppose que Y suit une loi normale de paramètres $(400 ; 392)$.

a) Etablir les probabilités suivantes :

- Il y a moins de 450 erreurs d'acheminement.
- Il y a entre 350 et 450 erreurs d'acheminement.

b) Déterminer le réel a tel que $IP(400 - a \leq Y \leq 400 + a) = 0,95$

Exercice 4

On suppose que le temps de bon fonctionnement des ILS, exprimé en jours, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

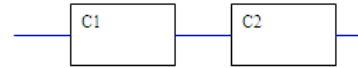
- 1) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période de 2 ans.
- 2) Calculer la probabilité qu'il y ait une défaillance sur une période de 3 ans, sachant qu'il n'y en a pas eu pendant 2 ans.

Exercice 5

Dans un système de sécurité d'un avion, un circuit ne fonctionne que si deux composants C1 et C2 ne tombent pas en panne (il suffit qu'un seul soit en panne pour que le circuit ne fonctionne pas). Les pannes de C1 et de C2 sont indépendantes.

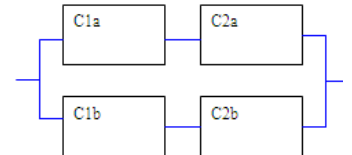
1. Sur une période donnée, C1 tombe en panne avec une probabilité p_1 et C2 avec une probabilité p_2 .

a) Le circuit de base est représenté ci-contre :



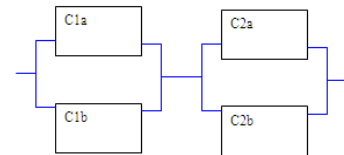
Quelle est la probabilité que le circuit tombe en panne ?

b) On réplique le circuit pour assurer une meilleure sécurité selon le schéma ci-contre :



Quelle est la probabilité que le circuit tombe en panne ?

c) On améliore ensuite la redondance en la câblant comme selon le schéma ci-contre :



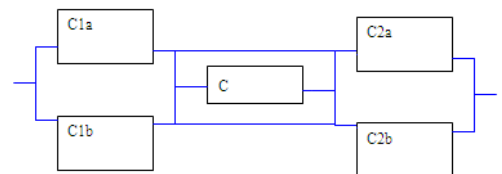
Quelle est la probabilité que le circuit tombe en panne ?

2. On suppose que le taux de défaillance du composant C₁ est $\lambda_1(t) = 0,0025t^{-0,5}$ pannes/heure, et que celui du composant C₂ est $\lambda_2(t) = 0,002$ pannes/heure.

a) Déterminer les fiabilités des composants C₁ et C₂, notées respectivement R₁ et R₂.

b) Exprimer à l'aide de R₁ et R₂ les fiabilités des systèmes dans les cas a), b) et c) représentés dans la première question, notées R_a, R_b et R_c respectivement.

3. On introduit un nouveau composant C dont le taux de défaillance est $\lambda_3(t) = 0,0025$ pannes/heure, suivant le schéma ci-contre :



a) Déterminer la fiabilité du composant C, notée R₃.

b) Déterminer la fiabilité de ce nouveau système à l'aide des précédents.

Exercice 6 Soit (X, Y) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les lois marginales de X et de Y.

2. Etudier l'indépendance du couple (X, Y).

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z = Y - X

(On effectuera le changement de variables : (x ; y) → (x ; y - x))