Initiation aux probabilités **TSA 14A**
Examen de juin 2015

Correction

Exercice 1

1. On nous dit qu'il y a exactement 3 boules "blanches et grosses". Or, sachant par hypothèse qu'il y a en tout 6 boules blanches, on déduit facilement que les 3 boules blanches restantes sont petites. Sachant également par hypothèse qu'il y a 5 boules grosses, on en déduit que les 2 boules grosses restantes sont noires, et, de même, sachant qu'il n'y a que 4 boules petites, on en déduit que la dernière d'entre elles est également noire.
Le tableau à double entrée à remplir était le suivant (en rouge, l'hypothèse donnée dans la question " il y a trois boules à la fois blanches et grosses") :

	grosses	petites
blanches	3	3
noires	2	1

Conclusion : Il y a 1 boule "petite et noire", 2 boules "grosses et noires" et 3 boules "petites et blanches" (ainsi, évidemment, que 3 boules "grosses et blanches").

2. On note ainsi les événements suivants :
B : "on obtient une boule blanche"
N : "on obtient une boule noire"
P : "on obtient une boule petite"
G : "on obtient une boule grosse"

Ici, on tire une boule au hasard, chacune de ces boules ayant la même probabilité d'être tirée. On se retrouve donc en situation d'équiprobabilité.

On nous demande de calculer :
►la probabilité que la boule tirée soit petite et blanche : il y a 9 boules parmi lesquelles 3 sont "petites et blanches", on a donc :

$$p(B \cap P) = 3/9 = 1/3$$

►la probabilité que la boule tirée soit blanche : il y a 9 boules parmi lesquelles 6 sont " blanches ", on a donc :

$$p(B) = 6/9 = 2/3$$

►la probabilité que la boule tirée soit petite : il y a 9 boules parmi lesquelles 4 sont " petites ", on a donc :

$$p(P) = 4/9$$

►la probabilité que la boule tirée soit blanche ou petite : ici, il va falloir utiliser la formule suivante :

$p(B \cup P) = p(B) + p(P) - p(B \cap P)$
$p(B \cup P) = 2/3 + 4/9 - 1/3$
$p(B \cup P) = 7/9$

Exercice 2

1-

On sait que $\mathbb{P}(X \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)) = 1$ et que

$$\mathbb{P}(X \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Donc la somme des probabilités contenues dans le tableau doit être égale à 1. On constate que la somme est ici $0{,}95 + \alpha$. Donc $\alpha = 0{,}05$.

2-

La loi marginale de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Un simple calcul donne les résultats résumés dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,45	0,25	0,3

De la même façon, on obtient la loi de Y donnée par

y	-1	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	0,5	0,3	0,2

3-

Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x et y, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$. Or, on remarque dans le tableau que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}3 \times 0{,}3 \neq 0$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

4-

On utilise la définition de la loi conditionnelle, $\mathbb{P}(X = x|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}$, ce qui conduit immédiatement à la loi résumée dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y = 1)$	$\frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$	$\frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$	$\frac{0}{0{,}3} = 0$

L'espérance conditionnelle est obtenue en appliquant la définition, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y=1) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x|Y=1),\\ &= -2\times\frac{2}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times 0,\\ &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

5-

On doit d'abord calculer $\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)}{\mathbb{P}(Y\neq 2)}$. Or, $\{Y \neq 2\} = \{Y = -1\} \cup \{Y = 1\}$, avec une union disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(X = x, Y \neq 2) = \mathbb{P}(X = x, Y = -1) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1),$$

ainsi que $\mathbb{P}(Y \neq 2) = \mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = -1) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1)}.$$

En appliquant cette formule, on obtient la loi conditionnelle résumée dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y \neq 2)$	$\frac{0{,}4}{0{,}8} = \frac{1}{2}$	$\frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4}$	$\frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4}$

On en déduit l'espérance conditionnelle souhaitée par le calcul suivant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y\neq 2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2),\\ &= -2\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4},\\ &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

6-

On calcule $\mathbb{E}(XY)$ en appliquant la propriété classique : pour toute fonction ϕ, on a

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \phi(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y).$$

Le tableau suivant donne les calculs intermédiaires $xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$:

$\mathbb{P}(X=x,Y=y)$	$y=-1$	$y=1$	$y=2$
$x=-2$	$0{,}2\times 2=0{,}4$	$0{,}2\times -2=-0{,}4$	$0{,}05\times -4=-0{,}2$
$x=0$	$0{,}1\times 0=0$	$0{,}1\times 0=0$	$0{,}05\times 0=0$
$x=1$	$0{,}2\times -1=-0{,}2$	$0\times 1=0$	$0{,}1\times 2=0{,}2$

On obtient ainsi $\mathbb{E}(XY)=-0{,}2$.

On sait que $Cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On calcule donc $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant les définitions de ces espérances :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\\ &= -2\times 0{,}45+0\times 0{,}25+1\times 0{,}3\\ &= -0{,}6.\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= -1\times 0{,}5+1\times 0{,}3+2\times 0{,}2\\ &= 0{,}2.\end{aligned}$$

On obtient finalement $Cov(X,Y)=-0{,}2-(-0{,}6)\times 0{,}2=-0{,}08$.

7-

Étudions maintenant $Z=X+Y$. Le tableau suivant donne les valeurs prises par Z en fonction de celles de X et Y :

$z = x + y$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	-3	-1	0
$x = 0$	-1	1	2
$x = 1$	0	2	3

On a donc $Z(\Omega) = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pour calculer la loi de $Z = f(X,Y)$, on doit déterminer $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in Z(\Omega)$ puis calculer la probabilité de $f^{-1}(z)$ à partir de la loi jointe de X et Y, en utilisant la propriété $\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}((X,Y) \in f^{-1}(z))$. On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = -3) &= \mathbb{P}(X = -2, Y = -1) = 0{,}2 \\
\mathbb{P}(Z = -1) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(-2, 1), (0, -1)\}) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \\
\mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(-2, 0), (1, -1)\}) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25 \\
\mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0{,}1 \\
\mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(0, 2), (1, 1)\}) = 0{,}05 + 0 = 0{,}05 \\
\mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0{,}1
\end{aligned}$$

Comme $Z = X + Y$ et que l'espérance est linéaire, on a

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = -0{,}6 + 0{,}2 = -0{,}4.$$

De plus, on sait que

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y).$$

On calcule donc les variances de X et Y. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \times 0{,}45 + 0^2 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}3 \\
&= 2{,}1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= (-1)^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 \\
&= 1.6.
\end{aligned}$$

Donc $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1{,}74$ et $V(Y) = 1{,}56$. On obtient finalement

$$V(Z) = 1{,}74 + 1{,}56 + 2 \times (-0{,}08) = 3{,}14.$$

Exercice 3

1-

Pour que f soit une densité, il faut que pour tout x, $f(x) \geq 0$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. On commence par la première condition. Comme f est nulle en dehors de l'intervalle [0,1], il suffit de considérer le cas $x \in [0,1]$ pour lequel on doit avoir $ax^2 + b \geq 0$.

On remarque que $f(0) = b$, et il faut donc que $b \geq 0$. Si $a = 0$, il n'y a pas d'autre condition nécessaire pour assurer la positivité.

La dérivée de f est donnée par $f'(x) = 2ax$. Sur l'intervalle [0,1], le signe de f' est donc celui de a. Si $a > 0$, f est croissante sur [0,1] et on a donc $f(x) \geq b$ pour tout $x \in [0,1]$. De ce fait, la condition $b \geq 0$ est encore suffisante pour assurer $f(x) \geq 0$. Si $a < 0$, f est décroissante sur [0,1], et donc a donc $f(x) \geq f(1) = a + b$ pour tout $x \in [0,1]$. On doit donc avoir $a + b \geq 0$.

En résumé si $b \geq 0$ et si $a \geq -b$, alors f est positive (le cas $a \geq -b$ inclus en particulier le cas $a \geq 0$).

Calculons maintenant $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. D'après les propriétés classiques de l'intégrale, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Comme f est nulle en dehors de [0,1], on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx.$$

La fonction $x \mapsto ax^2 + b$ admet comme primitive possible la fonction $x \mapsto \frac{a}{3}x^3 + bx$. On a donc

$$\int_0^1 ax^2 + b\, dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + b.$$

On doit donc avoir $\frac{a}{3} + b = 1$ (en plus de $b \geq 0$ et $a \geq -b$). Comme $b = 1 - \frac{a}{3}$, on a doit donc avoir $1 - \frac{a}{3} \geq 0$, soit $a \leq 3$. De plus $a + b \geq 0$ devient $a + 1 - \frac{a}{3} \geq 0$, soit $a \geq -\frac{3}{2}$.

Finalement, f est une densité si et seulement si $a \in \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ et $b = 1 - \frac{a}{3}$.

2-

On sait que $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \int_{0,5}^{\infty} f(x)dx$. Comme f est nulle en dehors de $[0{,}1]$, et en utilisant la primitive déterminée à la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) &= \int_{0,5}^{\infty} f(x)dx, \\
&= \int_{0,5}^{1} f(x)dx, \\
&= \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_{0,5}^{1}, \\
&= \frac{a}{3} + b - \frac{a}{3} \times \frac{1}{8} - b \times \frac{1}{2}, \\
&= 1 - \frac{a}{24} - \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la première question, on a donc deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{3} + b &= 1, \\
1 - \frac{a}{24} - \frac{b}{2} &= \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

En utilisant $b = 1 - \frac{a}{3}$ dans la deuxième équation, on obtient

$$1 - \frac{a}{24} - \frac{1}{2} + \frac{a}{6} = \frac{7}{8},$$

ce qui donne $a = 3$, puis $b = 0$ (et donc $f(x) = 3x^2$ sur $[0{,}1]$). On remarque que les valeurs de a et b sont compatibles avec les inégalités établies à la question 1 et donc qu'on obtient bien une densité.

3-

On sait que $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. ce qui donne ici (en tenant compte de la nullité de f en dehors de $[0{,}1]$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x \times 3x^2 dx, \\
&= \int_0^1 3x^3 dx, \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $x \mapsto \frac{3}{4}x^4$ est une primitive de $x \mapsto 3x^3$.

Pour calculer $V(X)$, on utilise la relation $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Comme $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 3x^4 dx,\\ &= \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5},\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $x \mapsto \frac{3}{5}x^5$ est une primitive de $x \mapsto 3x^4$. On a donc

$$V(X) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Exercice 4

On appelle D la variable aléatoire donnant la durée de vie du disque dur. D suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le fabricant veut garantir que

$$\mathbb{P}(D \leq 1) \leq 0.001.$$

Comme $\mathbb{P}(D \leq a) = F_D(a)$ par définition, on obtient l'inégalité

$$1 - \exp(-\lambda \times 1) \leq 0.001,$$

en appliquant la formule classique pour la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle. On a alors

$$\begin{aligned}1 - \exp(-\lambda) &\leq 0.001, &\\ 0.999 &\leq \exp(-\lambda), &\\ \ln(0.999) &\leq -\lambda, & \text{en utilisant la croissance de } \ln\\ \lambda &\leq -\ln(0.999), &\\ \frac{-1}{\ln(0.999)} &\leq \frac{1}{\lambda}, & \text{en utilisant la décroissance de } \frac{1}{x}\\ 999{,}5 &\leq \frac{1}{\lambda}. &\end{aligned}$$

Or, comme D suit une loi exponentielle, son espérance est $\frac{1}{\lambda}$. La durée de vie moyenne du disque dur doit donc être d'au moins 999,5 ans !

Exercice 5

1. Soit un système *A* constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0,003t^{-0,6} \text{ pannes/heure.}$$

a) $R_A(t) = \left(\exp\left(-\int_0^t 0,003x^{-0,6}dx\right)\right)^2 = \left(\exp\left(-0,003\frac{t^{0,4}}{0,4}\right)\right)^2 = \exp\left(-\frac{0,03}{2}.t^{0,4}\right)$

b) $R_A(1000) \simeq 0,788$

2. Soit un système *B* constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

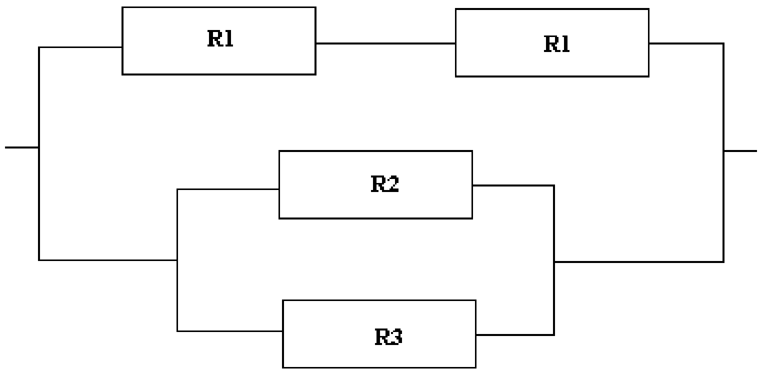
$$\lambda_2(t) = 0,001 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0,003 \text{ pannes/heure.}$$

a) $R_B(t) = 1 - (1 - e^{-0,001t})(1 - e^{-0,003t})$

b) $R_B(1000) \simeq 0,3994$

3. Soit le système *E* obtenu en mettant en parallèle les systèmes *A* et *B* des questions précédentes.

a) Diagramme de fiabilité du système *E* :



b) $R_E(t) = 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))$

c) $R_E(1000) \simeq 0,9327$

Exercice 6

1-

Soit T la variable aléatoire représentant la taille d'une femme. Par hypothèse, T suit une loi normale $\mathcal{N}(1{,}58; 0{,}06^2)$. On cherche $a > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(T \in [m - a, m + a]) = 0{,}9.$$

Soit la variable $Y = \frac{T-m}{\sigma}$. On sait que Y suit une loi normale standard $\mathcal{N}(0;1^2)$. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} m-a \leq & T & \leq m+a, \\ -a \leq & T-m & \leq a, \\ -\dfrac{a}{\sigma} \leq & \dfrac{T-m}{\sigma} & \leq \dfrac{a}{\sigma}. \end{array}$$

Donc $\mathbb{P}(T \in [m-a, m+a]) = 0{,}9$ est équivalent a $\mathbb{P}(Y \in [-\frac{a}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}]) = 0{,}9$. Cherchons donc λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0{,}9$.

On sait que

$$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = F_Y(\lambda) - F_Y(-\lambda),$$

car Y est une variable aléatoire continue. De plus, par symétrie de la loi normale standard, on $F_Y(-\lambda) = 1 - F_Y(\lambda)$, et ainsi

$$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 2F_Y(\lambda) - 1.$$

De ce fait, chercher λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0{,}9$ est équivalent à chercher λ tel que $F_Y(\lambda) = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$.

La lecture de la table de la loi normale donne :

$$\begin{array}{l} F_Y(1{,}64) = 0{,}9495, \\ F_Y(1{,}65) = 0{,}9505. \end{array}$$

Pour avoir un intervalle légèrement plus grand que celui recherché par le fabricant, on choisit $\lambda = 1{,}65$. Si on pose $a = \sigma\lambda = 0{,}06 \times 1{,}65 = 0{,}099$, on a donc

$$\mathbb{P}(T \in [m-a, m+a]) = \mathbb{P}(T \in [1{,}481; 1{,}679]) \simeq 0{,}9$$

Étudions le premier intervalle. On a

$$\begin{array}{rcl} m-a \leq & T & \leq m - \frac{a}{3}, \\ -a \leq & T-m & \leq -\frac{a}{3}, \\ -\dfrac{a}{\sigma} \leq & \dfrac{T-m}{\sigma} & \leq \dfrac{a}{3\sigma}, \\ -\lambda \leq & Y & \leq -\dfrac{\lambda}{3}, \end{array}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in \left[m-a, m-\frac{a}{3}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[-\lambda, -\frac{\lambda}{3}\right]\right), \\
&= F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y(-\lambda), \\
&= 1 - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1 + F_Y(\lambda), && \text{par symétrie} \\
&= 0{,}9505 - F_Y\left(\frac{1{,}65}{3}\right), && \text{selon l'analyse précédente} \\
&= 0{,}9505 - 0{,}7088, && \text{par lecture dans la table} \\
&= 0{,}2417.
\end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in \left[m-\frac{a}{3}, m+\frac{a}{3}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}\right]\right), \\
&= F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right), \\
&= 2F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1, \\
&= 2 \times 0{,}7088 - 1, \\
&= 0{,}4176.
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in \left[m+\frac{a}{3}, m+a\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[\frac{\lambda}{3}, \lambda\right]\right), \\
&= F_Y(\lambda) - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right), \\
&= 0{,}9505 - 0{,}7088, \\
&= 0{,}2417,
\end{aligned}$$

ce dernier résultat étant évident par symétrie de la loi normale autour de sa moyenne.

On calcule enfin les pourcentages à partir de ces probabilités. La production totale correspond à 90% de la population et on doit donc diviser les probabilités obtenues par cette valeur. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\%\text{ de S} &= \frac{0{,}2417}{0{,}90} &\simeq 27\% \\
\%\text{ de M} &= \frac{0{,}4176}{0{,}90} &\simeq 46\% \\
\%\text{ de L} &= \frac{0{,}2417}{0{,}90} &\simeq 27\%
\end{aligned}$$

Remarque : l'exercice se termine par un piège classique : comme le fabricant se contente de cibler 90 % de la population, les probabilités d'obtenir les différentes tailles ne donnent pas directement les pourcentages de la production. On doit passer par un ratio pour obtenir ces pourcentages.

Exercice 7

1) $P(N_{1826} - N_0 = 0) = e^{-0{,}015\times 1826} \simeq 1{,}27\times 10^{-12}$

2) $P(N_{1826} - N_0 = 2) = e^{-0{,}015\times 1826} \times \dfrac{(0{,}015\times 1826)^2}{2} \simeq 4{,}77\times 10^{-10}$