Initiation aux probabilités **TS 14A**
Examen de juin 2015

Seuls les documents distribués avec le sujet et une calculatrice sont acceptés.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1 Dans un sac, il y a des grosses boules et des petites; ces boules sont blanches ou noires. On sait qu'il y a 5 grosses et 4 petites parmi lesquelles 6 sont blanches et 3 noires.

1- Sachant qu'il y a exactement trois boules à la fois blanches et grosses, déterminer le nombre de boules " petites et noires ", " grosses et noires ", " petites et blanches ". (On pourra utiliser un tableau à double entrée).

2. On tire une boule au hasard, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée; quelles sont les probabilités pour qu'elle soit :
- blanche et petite ?
- blanche ?
- petite ?
- blanche ou petite ?

Exercice 2 Soit un couple de variables aléatoires (X; Y) tel que X(Ω) = {-2; 0; 1} et Y(Ω) = {-1; 1; 2} dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$	$y=-1$	$y=1$	$y=2$
$x=-2$	0,2	0,2	α
$x=0$	0,1	0,1	0,05
$x=1$	0,2	0	0,1

1- Donner l'unique valeur possible pour α en justifiant brièvement la réponse.
2- Calculer les lois marginales de X et de Y.
3- Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
4- Calculer la loi conditionnelle de X sachant Y = 1. En déduire E(X | Y = 1).
5- Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que Y $\neq$ 2.
6- Calculer E(XY) et en déduire Cov(X;Y).
7- On pose Z = X + Y . Calculer la loi de Z, puis E(Z) et V(Z).

Exercice 3 Soit la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- À quelles conditions sur *a* et *b* la fonction *f* est-elle la densité d'une variable aléatoire continue ?
2- On suppose que *a* et *b* vérifient les conditions déterminées à la question précédente.
Soit X une variable aléatoire de densité *f* telle que P(X $\geq 0,5$)= $\frac{7}{8}$. Déterminer *a* et *b*.
3- Calculer E(X) et V (X) en utilisant les valeurs de *a* et *b* obtenues à la question précédente.

T.S.V.P.

Exercice 4 On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0,001 de tomber en panne sur un an.
Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice 5
1. Soit un système *A* constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0{,}003t^{-0{,}6} \text{ pannes/heure.}$$

a) Déterminer la fiabilité de ce système.
b) Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

2. Soit un système *B* constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

$$\lambda_2(t) = 0{,}001 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0{,}003 \text{ pannes/heure.}$$

a) Déterminer la fiabilité de ce système.
b) Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

3. Soit le système *E* obtenu en mettant en parallèle les systèmes *A* et *B* des questions précédentes.
a) Dessiner le diagramme de fiabilité du système *E*.
b) Déterminer alors la fiabilité du nouveau système.
c) Calculer ensuite cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 6 D'après une étude récente, la taille des femmes françaises est distribuée selon une loi normale de moyenne m = 1,58 et d'écart-type σ = 0,06. Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.

1- Il commence par déterminer un intervalle de la forme [*m-a*, *m+a*] (donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne 90 % (environ) des tailles des femmes françaises : calculer *a*.
2- Il en déduit trois tailles, *S*, *M* et *L*, correspondant respectivement aux intervalles suivants : [*m-a, m-a/3*], [*m-a/3, m+a/3*] et [*m+a/3, m+a*].
Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

Exercice 7 Après avoir observé la durée de vie des ILS, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}015$ pannes/jour.

1- En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période de 5 ans.
2- Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances sur la même période.