Initiation aux Statistiques **TSA 12B**

Correction Examen du 17/02/2014

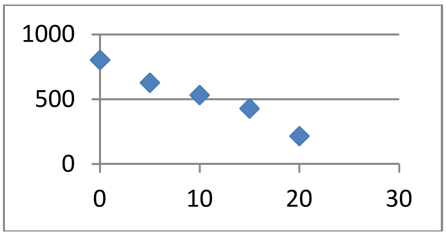
Seuls les documents distribués avec le sujet sont acceptés. Les calculatrices sont autorisées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne l'évolution des surfaces cultivées en avoine (en milliers d'hectares) en France de 1970 à 1990.

Année	1970	1975	1980	1985	1990
X = Rang de l'année	0	5	10	15	20
Y = Superficie en milliers d'ha	805	629.7	534.3	431	218

1- Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X; Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité graphique: en abscisse 0.5 cm pour 1 unité, en ordonnée 2 cm pour 100 milliers d'hectares).



2- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y $r \simeq -0,99$.
Un ajustement affine est-il justifié? oui

b) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X. y = -27,45 x + 798,14

3- a) Quelle estimation de la surface cultivée en avoine en 1989 (rang x = 19) peut-on faire à partir de l'équation de la droite de régression? En donner l'arrondi au dixième $y \simeq 276,6$.

b) En réalité en 1989, les surfaces cultivées avaient une superficie de 266.2 hectares. Exprimer l'erreur commise en pourcentage de la valeur réelle. $\frac{276,6-266,2}{266,2} \times 100 \simeq 3,9$

Exercice 2

Un sondage BVA a été réalisé au mois de janvier 2014 sur 612 électeurs pour les élections municipales dans la ville de Toulouse.
Pour le premier tour, ce sondage crédite le maire sortant de 35% d'intentions de vote contre 37% à son principal adversaire.
Déterminer les intervalles de confiance à 95% correspondants.
Pour le maire sortant : $I \simeq$ [31,22 ; 38 ; 78]
Pour son adversaire : $I \simeq$ [33,17 ; 40,83]
Le Maire sortant peut-il espérer sortir en tête au premier tour ?
Les deux intervalles de confiance n'étant pas disjoints, le maire sortant peut espérer sortir en tête après le premier tour.

Exercice 3

Une agence qui organise des séjours linguistiques en Angleterre pour de jeunes européens a établi une répartition des nationalités qui se stabilise depuis plusieurs années:
41% de leurs clients sont français ; 29% sont espagnols ; 13% sont allemands ; 9% sont italiens ; les 8% restants provenant d’autres pays européens.
Lors du prochain séjour, 149 jeunes sont inscrits. Parmi eux : 59 français, 38 espagnols, 31 allemands, 12 italiens, 3 suisses, 2 portugais, 2 belges, 1 hollandais et 1 autrichien.
A risque de 5%, cette répartition confirme-t-elle la tendance des années antérieures ?

	Français	Espagnols	Allemands	Italiens	Autre
Proportions théoriques	0,41	0,29	0,13	0,09	0,08
Proportions réelles	$\frac{59}{149}$	$\frac{38}{149}$	$\frac{31}{149}$	$\frac{12}{149}$	$\frac{9}{149}$

On effectue un test du χ^2 pour tester l’adéquation au modèle :

On trouve : $k_{149} \simeq 8,546$ et $\chi^2_{4;0,95} \simeq 9,488$. On peut donc valider l’hypothèse d’adéquation.

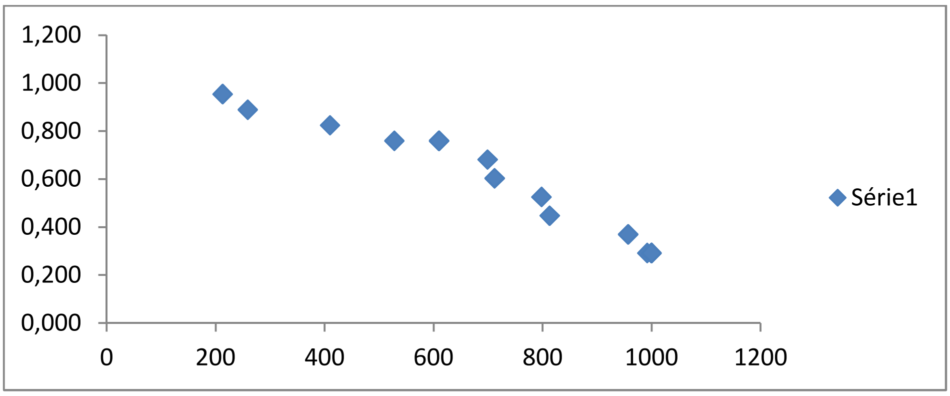
Exercice 4

Les durées de vie suivies d'un astérisque correspondent à deux ampoules soumises à une surtension accidentelle au bout de 350 heures, et à 3 ampoules encore en vie à la fin de l'expérimentation pour les valeurs 1000.

1- Calculer une estimation de la fiabilité d'une ampoule en utilisant la méthode de Johnson.

t	213	259	410	528	610*	610*	699	712	798	813	957	992	1000*	1000*	1000*
R(t)	0,955	0,890	0,825	0,760	0,760	0,760	0,682	0,604	0,526	0,448	0,370	0,292	0,292	0,292	0,292

1- On modélise la durée de vie de ces ampoules par une loi exponentielle. Estimer graphiquement la durée de vie moyenne. $\text{MTTF} \simeq 900$ $(\lambda \simeq 0,001)$



Exercice 5

Une étude réalisée auprès de 650 enfants vise à établir un lien entre le temps moyen passé devant un écran par jour (en heures) et le rang dans la fratrie.
Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus :

Temps passé devant un écran / Rang dans la fratrie	Moins de 2h	Entre 2h et 4h	Plus de 4h	TOTAL
Rang 1	118	68	56	242
Rang 2	98	79	49	226
Rang 3	61	69	52	182
TOTAL	277	216	157	650

Tester l'indépendance entre le temps passé devant un écran et le rang dans la fratrie avec un risque de 5%.

$$\frac{\left(118-\frac{277\times 242}{650}\right)^2}{\frac{277\times 242}{650}}+\frac{\left(68-\frac{216\times 242}{650}\right)^2}{\frac{216\times 242}{650}}+\frac{\left(56-\frac{157\times 242}{650}\right)^2}{\frac{157\times 242}{650}}+\ldots\simeq 11{,}2$$

$\chi^2_{4;0{,}95}=9{,}49<11{,}2$

Au risque de 5%, on peut rejeter l'hypothèse d'indépendance entre le temps passé devant un écran et le rang dans la fratrie.

Exercice 6

Soient T_1 et T_2 deux estimateurs sans biais et indépendants d'un paramètre θ, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2. Soit α un réel de l'intervalle [0 ; 1].

1- Montrer que la variable aléatoire $T = \alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2$ est un estimateur sans biais de θ.

$\mathrm{IE}(T)=\alpha \mathrm{IE}(T_1)+(1-\alpha)\mathrm{IE}(T_2)=\alpha\theta+(1-\alpha)\theta=\theta$ T est donc un estimateur sans biais de θ

2- Pour quelle valeur de α la variance de T est-elle minimale ?

$\mathrm{Var}(T)=\alpha^2\mathrm{Var}(T_1)+(1-\alpha)^2\,\mathrm{Var}(T_2)=\alpha^2\sigma_1^2+(1-\alpha)^2\,\sigma_2^2=\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\alpha^2-2\sigma_2^2\alpha+\sigma_2^2$

Ce polynôme en α est minimal pour : $\alpha=\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.