Chapitre V

Processus stochastique

Ce chapitre sera abordé directement dans le cadre de l'application en fiabilité, afin de faciliter sa compréhension.

1 Introduction

Nous avons résolu le problème de la disponibilité d'un système, c'est à dire à un instant t, quelle est la probabilité que le système fonctionne, et ce pour un certain nombre de systèmes (parallèle, série, mixte,…). En revanche, il nous reste plusieurs problèmes à résoudre.

- Si on est en présence d'un système dont le temps de réparation est très court et dont le temps de bon fonctionnement est court, la disponibilité est proche de 1. Pourtant, l'appareil ne doit pas être considéré comme bon, puisqu'il va tomber en panne souvent. Il faut donc aussi étudier le nombre de défaillances et pas seulement les temps de défaillances.
- On veut aussi connaître la probabilité d'avoir un nombre donné de défaillances dans un intervalle de temps donné.
- Nous n'avons pas encore parlé des éléments de secours qui sont pourtant omniprésents dans le monde de l'aviation civile.

Il va donc falloir étudier le lien entre temps de défaillances et nombre de défaillances.

2 Processus ponctuel

Définition 40 On dit d'un processus $(T_n)_{n=1,2,...}$ qu'il est *ponctuel* si :

$$\forall n \geq 1, \quad T_n < T_{n+1}$$

Exemples 25

1. Instants d'arrivée des avions dans un secteur,
2. Instants de passage de véhicules à un péage,
3. Instants de défaillance d'un système,…

Remarque 24 Le processus ponctuel est souvent interprété comme représentant les instants d'occurrence d'un phénomène aléatoire.

Définition 41 Le processus (N_t) est appelé *processus de comptage* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $N_t \in \mathbb{N}$,
2. $s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$,
3. $N_t - N_s$ représente le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle $]s; t]$.

La quantité $N_t - N_s$ est l'accroissement du processus.

Proposition 17 Si on pose $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}}$ où (T_n) est un processus ponctuel, alors (N_t) est un processus de comptage.

3 Processus de renouvellement

3.1 Simple

Définition 42 (T_n) est un processus de *renouvellement simple* s'il existe des V.A. (ξ_n) indépendantes, de même loi, telles que :

$$T_0 = 0 \text{ et } T_n = T_{n-1} + \xi_n \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Exemple 26 Si la durée de réparation est négligeable et que l'élément est remplacé, on pose ξ_n le temps de bon fonctionnement du $n^{\text{ième}}$ élément.

Remarque 25 Les accroissements du processus sont indépendants et stationnaires.

3.2 Alterné

Définition 43 (T_n) est un processus de *renouvellement alterné* s'il existe des V.A. (ξ_n) telles que :

$$T_0 = 0 \text{ et } T_n = T_{n-1} + \xi_n \quad \text{avec } \begin{cases} (\xi_n) \text{ indépendantes,} \\ \xi_{2n+1} \text{ de même loi,} \\ \xi_{2n} \text{ de même loi.} \end{cases}$$

Remarque 26 Si on pose ξ_{2n+1} des temps de bon fonctionnement et ξ_{2n} des temps de réparation, le processus précédent correspond à l'étude de la disponibilité du chapitre précédent.

4 Processus de Poisson

4.1 Processus ponctuel

Définition 44 (T_n) est un processus de *Poisson homogène* de paramètre λ si (T_n) est un processus de renouvellement simple où les (ξ_n) sont des V.A. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ.

Proposition 18 Pour tout $n \ge 1$, la loi du vecteur $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ a pour densité :

$$f_{T_1, T_2, \ldots, T_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n\}}$$

Proposition 19 La loi de T_n est une loi Gamma $\gamma(n,\lambda)$, c'est à dire a pour densité :

$$f_{T_n}(t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \frac{t_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$$

Proposition 20 Soit un système à n éléments (un élément principal plus n-1 élément(s) de secours). La fiabilité du système est donnée par :

$$R_n(t) = \mathrm{IP}(T_n > t) = e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Nous allons étudier plus particulièrement le processus de comptage (N_t) associé au processus de Poisson homogène (T_n).

4.2 Processus de comptage

Proposition 21 Soient (T_n) un processus de Poisson homogène et (N_t) son processus de comptage associé. La loi de N_t est une loi de Poisson de paramètre λt.

Il est parfois plus intéressant de travailler sur les accroissements du processus de comptage pour répondre à la question: quelle est la probabilité d'avoir deux défaillances entre un et deux ans de fonctionnement ?

Proposition 22 Soit (T_n) un processus de Poisson homogène, alors (N_t), son processus de comptage associé, vérifie :

1. $N_0 = 0$,
2. N_t est à accroissements indépendants,
3. pour $0 \le s < t$, la variable aléatoire réelle N_t - N_s suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.