

Chapitre III

Vecteur aléatoire réel

Nous avons vu les principales lois discrètes et continues dans le cas univarié (c'est-à-dire lorsqu'on ne manipule qu'une seule V.A.R.).

Dans ce chapitre, nous allons manipuler plusieurs V.A.R., calculer la dépendance entre deux V.A.R. et faire des changements de V.A.R. Les manipulations se feront soit avec deux lois discrètes soit avec deux lois continues, *mais pas* avec une loi discrète et une loi continue.

1 Couple de variables aléatoires réelles

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un couple de V.A.R. et non plus à une seule V.A.R. Nous allons voir comment définir un couple de V.A.R. (densité bivariée,...). En fait, nous allons généraliser la plupart des résultats vus dans le cas univarié.

Toutes les définitions données ici peuvent être généralisées au cas d'un vecteur à n composantes (et non plus deux, comme nous allons voir) sans trop de difficultés.

1.1 Définitions

Définition 21 Soit Ω un univers muni d'une probabilité IP.

Un couple de variables aléatoires réelles (ou vecteur aléatoire réel de dimension 2) est une application $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui permet de définir une nouvelle probabilité $Q_{X,Y}$ sur \mathbb{R}^2 , appelée *probabilité image* de IP par (X, Y) .

Cette nouvelle probabilité est entièrement déterminée par l'équation suivante :

$$Q_{X,Y}([-\infty; t_1] \times]-\infty; t_2]) = \text{IP}(X^{-1}([-\infty; t_1]) \cap Y^{-1}([-\infty; t_2])).$$

Comme pour le cas univarié, on peut alors définir la fonction de répartition bivariée.

Définition 22 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire réel. On appelle *fonction de répartition* de (X, Y) l'application :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; 1] \\ (t_1, t_2) \mapsto F(t_1, t_2) = Q_{X,Y}([-\infty; t_1] \times]-\infty; t_2]) \end{cases}$$

Propriété 15 Toute fonction de répartition F d'un vecteur aléatoire vérifie :

1. $0 \leq F \leq 1$.
2. Si pour tout $i \in \{1; 2\}$, $t_i \leq t'_i$ alors $F(t_1, t_2) \leq F(t'_1, t'_2)$
3. F est continue à gauche en chacune de ses variables.
4. S'il existe $i \in \{1; 2\}$ tel que $t_i \rightarrow -\infty$, alors $F(t_1, t_2) \rightarrow 0$.
Si pour tout $i \in \{1; 2\}$, $t_i \rightarrow +\infty$, alors $F(t_1, t_2) \rightarrow 1$

Définition 23 (Cas discret) La loi du couple (X, Y) est définie par les probabilités suivantes :

$$\forall (j, k) \in I_{(X, Y)}, \quad \mathbb{P}[X = x_j, Y = y_k] = p_{jk}$$

où $I_{(X, Y)}$ est un ensemble fini ou dénombrable et $\sum_{(j, k) \in I_{(X, Y)}} p_{jk} = 1$.

Définition 24 (Cas continu) La loi du couple (X, Y) est définie par la densité suivante (lorsque la fonction de répartition est définie) :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$$

1.2 Lois marginales et indépendance

Lorsqu'on connaît la loi du couple (X, Y) , on peut calculer la loi de X et celle de Y , c'est ce qu'on appelle les lois marginales.

Pour calculer la loi de X (resp. la loi de Y), on va sommer sur toutes les valeurs que prend Y (resp. les valeurs que prend X). On passe alors de la loi du couple (une loi bivariée) à une loi univariée, c'est-à-dire que la connaissance de la loi de (X, Y) nous fournit la connaissance des lois de X et de Y . La réciproque n'est pas vraie car il nous manque l'information sur le lien qui unit ces deux lois.

Nous avons vu dans le chapitre précédent la notion d'indépendance de V.A.R.

Ce qui définit les V.A.R. X et Y , ce sont les lois marginales. On dira donc que deux V.A.R. X et Y sont indépendantes si la loi du couple (X, Y) est le produit des lois marginales de X et de Y .

Mais avant cela, il faut savoir calculer les lois marginales à partir de la loi du couple.

Définition 25 (Cas discret) Les lois marginales de X et de Y sont définies par :

- loi marginale de X : $p_{j\bullet} = \sum_k p_{jk}$,
- loi marginale de Y : $p_{\bullet k} = \sum_j p_{jk}$.

Il est facile de vérifier que $p_{j\bullet}$ et $p_{\bullet k}$ définissent bien deux probabilités. De plus, on a d'après notre définition : X et Y sont deux V.A.R. indépendantes si et seulement si $p_{jk} = p_{j\bullet} \cdot p_{\bullet k}$.

Cette notion d'indépendance rejoint la notion déjà vue puisque l'égalité précédente est équivalente à :

$$\mathbb{P}[X = x_j, Y = y_k] = \mathbb{P}[X = x_j] \cdot \mathbb{P}[Y = y_k]$$

Définition 26 (Cas continu) Les lois marginales de X et de Y sont définies par :

- loi marginale de X : $f_X(x) = \int_{I_Y} f_{X,Y}(x, y) dy$,
- loi marginale de Y : $f_Y(y) = \int_{I_X} f_{X,Y}(x, y) dx$.

où I_Y (resp. I_X) est l'ensemble des valeurs que prend la V.A.R. Y (resp. X).

Là aussi, il est facile de vérifier que f_X et f_Y sont deux densités. De plus, on a d'après notre définition : X et Y sont deux V.A.R. indépendantes si et seulement si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

2 Moments d'un couple

Définition 27 Soit (X, Y) un couple de V.A.R. et Φ une fonction. On appelle *espérance* de $\Phi(X, Y)$ la quantité suivante :

$$\mathbb{E}[\Phi(X, Y)] = \sum_{(j,k) \in I_{(X,Y)}} \Phi(x_j, y_k) p_{jk} \quad \text{dans le cas discret}$$

$$\mathbb{E}[\Phi(X, Y)] = \iint_{I_{(X,Y)}} \Phi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad \text{dans le cas continu}$$

On peut alors définir plusieurs quantités, notamment la corrélation qui est une des mesures de dépendance les plus utilisées.

Définition 28 Le *moment* d'ordre (j, k) est défini par :

$$m_{j,k} = \mathbb{E}[X^j Y^k].$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = m_{1,0}$ et $\mathbb{E}(Y) = m_{0,1}$.

Le *moment centré* d'ordre (j, k) est défini par :

$$\mu_{j,k} = \mathbb{E}\left[(X - m_{1,0})^j (Y - m_{0,1})^k \right] \quad m_{j,k} = \mathbb{E}[X^j Y^k].$$

En particulier, $\text{Var}(X) = \mu_{2,0}$ et $\text{Var}(Y) = \mu_{0,2}$.

Définition 29 La *covariance* entre X et Y est la quantité $\mu_{1,1}$ c'est-à-dire :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{IE}[(X - m_{1,0})(Y - m_{0,1})] = \text{IE}(XY) - \text{IE}(X)\text{IE}(Y).$$

On définit alors la *corrélation* par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Proposition 8 Si X et Y sont deux V.A.R. indépendantes alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3 Changements de variables bivariés

Soit g une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On pose $g(X, Y) = (U, V)$.

Cas discret :
$$\text{IP}((U, V) = (u_m, v_m)) = \sum_{(j,k)/g(x_j, y_k) = (u_m, v_m)} \text{IP}((X, Y) = (x_j, y_k))$$

Remarque 16 Si la fonction g est bijective, alors il n'existe qu'un seul point (x_j, y_k) tel que $g(x_j, y_k) = (u_m, v_m)$ et donc on a :

$$\text{IP}((U, V) = (u_m, v_m)) = \text{IP}((X, Y) = (x_j, y_k)).$$

Cas continu :

Soit (X, Y) , un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^2 admettant la densité $f_{X,Y}(x, y) \mathbb{1}_D(x, y)$ où D est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On suppose que l'application g est bijective et que $g(D) = \Delta$. On a alors le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{g} \Delta \\ (X, Y) &\mapsto (U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y)) \end{aligned}$$

La transformation inverse est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta &\xrightarrow{g^{-1}} D \\ (U, V) &\mapsto (X, Y) = ((g^{-1})_1(U, V), (g^{-1})_2(U, V)) \end{aligned}$$

Alors le vecteur $g(X, Y)$ admet la densité définie par :

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y} \left((g^{-1})_1(u, v), (g^{-1})_2(u, v) \right) \left| J_{g^{-1}}(u, v) \right| \mathbb{1}_\Delta(u, v)$$

où $\left| J_{g^{-1}}(u, v) \right|$ représente la valeur absolue de $J_{g^{-1}}(u, v)$, qui est le déterminant, supposé non nul en tout point, de la matrice jacobienne :

$$J_{g^{-1}}(u, v) = \det \left(\text{Jac} \left[g^{-1}(u, v) \right] \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial (g^{-1})_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial (g^{-1})_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial (g^{-1})_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial (g^{-1})_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

4 Convergence en loi et théorème limite centrale

Soit F_n (respectivement F) la fonction de répartition de X_n (respectivement X).

Définition 30 On dit que X converge en loi vers X si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = F(t) \quad \text{en tout point } t \in \mathbb{R} \text{ où } F \text{ est continue.}$$

Théorème Limite centrale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de V.A.R. indépendantes, de même loi, de moyenne m et de variance σ^2

Alors on a :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(0,1)$$

Remarque 17 Ce théorème justifie l'importance accordée à la loi normale. En effet, dès qu'une V.A.R. X pourra être considérée comme la somme de n V.A.R. indépendantes et identiquement distribuées, alors on pourra appliquer le résultat précédent et approcher X par une loi gaussienne. On verra dans le prochain module que ce sera le cas pour nos statistiques de test.

Exemple 24 Toute V.A.R. X qui suit une loi binomiale $B(n, p)$ peut être considérée comme la somme de n variables de Bernoulli.

D'après le théorème précédent, on a alors le résultat suivant :

$$\frac{X - n.p}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(0,1)$$

Pour n assez grand, on peut donc approcher une loi binomiale par une loi gaussienne.